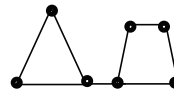


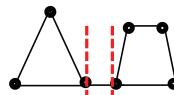
## Kostra grafu - procvičování

**Příklad:** Kolik různých koster má graf na obr. č. 1?

**Řešení:** Graf rozdělíme na 3 podgrafy, na obr. č. 2 odděleny přerušovanými čarami. U prvního podgrafu, který je kružnice, musíme vymazat jednu hranu - máme 3 možnosti, jak zvolit kostru. V druhém podgrafu je pouze jedna možnost výběru hrany a ve třetím podgrafu jsou 4 možnosti. Výběr vymazané hrany z první kružnice je nezávislý na druhé kružnici (jsou disjunktní), a proto podle principu nezávislých výběrů máme  $3 \cdot 1 \cdot 4 = 12$  koster. Nakreslete je.



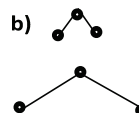
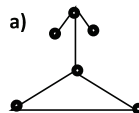
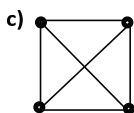
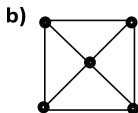
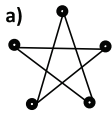
Obr. č. 1: Graf



Obr. č. 2: Vyznačení podgrafů v grafu

### Úlohy k procvičení

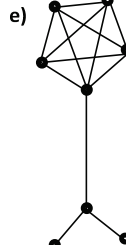
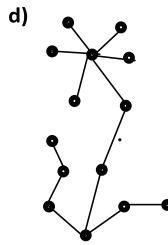
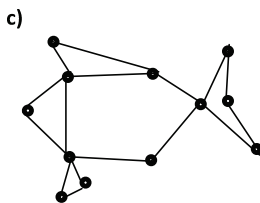
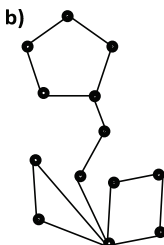
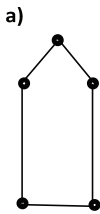
- Kolik hran musíte přidat do kružnice délky a) 4, b) 6, aby vznikl úplný graf na a) 4, b) 6 vrcholech?
- Jsou grafy na obr. č. 3 úplné? Pokud ne, doplňte je hranami tak, aby byly úplné.



Obr. č. 3: Grafy k úloze 2

Obr. č. 4: Grafy k úloze 5

- Pro jakou hodnotu  $n$  je úplný graf  $K_n$  zároveň a) cestou, b) kružnicí?
- Určete počet různých cest délky a) 2, b) 3 mezi dvěma různými vrcholy  $K_5$ .
- Vyznačte 3 různé podgrafy grafu na obr. č. 4 a). Je b) podgraf tohoto grafu?
- Kolik koster má graf a)  $K_1$ , b)  $K_4$ , c)  $K_5$ ?
- Kolik koster má kružnice délky 2004?
- Kolik vrcholů a koster má strom s 15 hranami? Je to jednoznačné? Načrtněte.
- Kolik nejméně hran je třeba vypustit z grafů na obr. č. 5, aby zbyla jeho kostra? Kolik různých koster grafy mají?



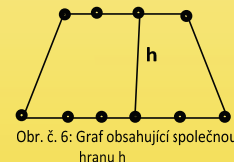
Obr. č. 5: Grafy k úloze 9

### Anotace, citace a zdroje

- Materiál navazuje na DUM Dn86 a ukazuje, jakým způsobem lze určit počet koster grafu. Je možné jej použít jako pracovní list a vyřešení uvedených příkladů by mělo vést k porozumění pojmů úplný graf a kostra grafu. Vhodné navázat DUMy Dn88 a Dn89, které se věnují hledání minimální kostry a řešení praktických úloh.
- MATOUŠEK, J.; NEŠETŘIL, J. Kapitoly z diskretní matematiky. Praha: Karolinum, 2000
- <http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/Grafy-text07.pdf/stazeno> (16. 9. 2012)

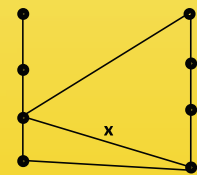
### Zajímavosti

- Jestliže má graf nějakou hranu společnou, je určování počtu jeho koster náročnější. Aby zbyla kostra grafu na obr. č. 6, musíme vymazat dvě hrany z grafu. Nelze však vypouštět jednu hranu z levé kružnice a jednu z pravé, protože by výběry nebyly nezávislé - hrana  $h$  je oběma sdílená. Řešení učíme jako součet disjunktních možností; počtu koster obsahujících  $h$  a počtu koster bez této hrany. Pokud hranu  $h$  vymazeme, zůstane kružnice délky 10 a ta má 10 koster. Pokud naopak hranu  $h$  zachováme, musíme z „levého oblouku“ kružnice od  $h$  vymazat jednu ze 6 hran a z „pravého oblouku“ jednu ze 4 hran. Tyto výběry již jsou nezávislé a počet možností je  $6 \cdot 4 = 24$ . Celkem má náš graf  $10 + 24 = 34$  koster.



Obr. č. 6: Graf obsahující společnou hranu  $h$

- Kolik různých koster má graf na obr. č. 7?



Obr. č. 7: Graf obsahující společnou hranu  $x$